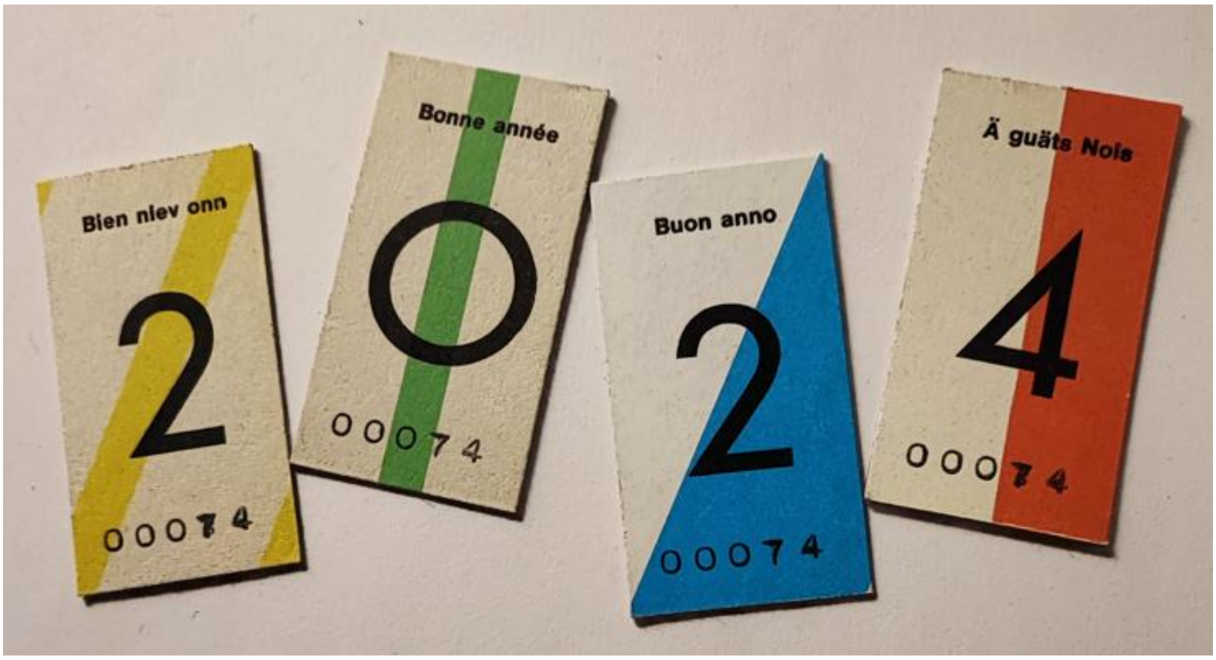
Peter Hammer 24. V 24
chaosachso21@gmail.com

K unst I st , Bewährtes zu erhalten !



Fabio Parizzi , Rapperswil / SG / CH

K u n s t I s t , A L L E R L  zu ma Thema tisieren !

Peter Hammer chaosachso21@gmail.com

Armin Widmer widmer.ar@bluewin.ch

Felix Huber felix.68@gmx.ch

Rätsel des Monats $2 + 4 \cdot 5 + 2 + 0 = 24$

D A ist da

Idee **Hans Huwiler , Armin Widmer und Peter Hammer**

KI meint: «Es gibt keinen direkten Zusammenhang zwischen dem Dadaismus und der **Zahl 24**.» Dem ist so ! Immerhin muss KI eingestehen, dass unser Zahlenspiel «D A» parallel zum Dadaismus – gegründet 1916 in Zürich – ebenfalls von einem Zufälligkeitsprinzip und dem scheinbaren Verlust der Semantik geprägt ist.

Das originelle **D A** – **D**eep **A**lone – kreiert vom Zürcher Mathematiker **Hans Huwiler** ist einerseits verblüffend einfach, anderseits aus einem mathematischen Blickwinkel bei der Analyse der Zufälligkeitsprinzipen höchst interessant, wobei der psychologische Aspekt die Hauptrolle für sich beanspruchen darf.

Worum geht es: Beispielsweise in einer Gruppe von **24 Personen** notiert jeder eine natürliche Zahl für den Rest der Gruppe unsichtbar. Derjenige mit der kleinsten Zahl wird **24 Goldtaler** gewinnen, aber als Pointe nur dann, wenn sie oder er die Zahl notiert hat, die nicht nur the «**D**eepest» ist, sondern auch «**A**lone».
Wir machten die Erfahrung, dass es bei einer Gruppe von **24 Personen** sehr, sehr heikel ist, die Eins zu notieren, denn in der Regel tendieren die kleinen Zahlen dazu, mehrfach aufzutauchen, und somit die D A – Forderung missachten !

Stellen wir uns vor, es sind eine Million Teilnehmer und es frohlockt ein Gewinn von einer Million, so wird vielleicht sogar die **Zahl 2024** zu einem Volltreffer. Das Schöne am Spiel **D A** ist, dass es zwar eine Art «mathematisches Bauchgefühl» braucht, aber vor allem auch ein «psycho-LOGISCH-es» Gespür, um die Gewinnchancen zu optimieren. Und wer weiss, vielleicht gewinnt bei einer Million Teilnehmern absolut unerwartet jemand, der nichts denkt, die Eins notiert und damit rechnet, dass alle anderen etwas denken !

Frage **Wir lassen einen Zufalls-Generator laufen und lassen uns 24 natürliche Zahlen servieren. Die natürlichen Zahlen dürfen vereinzelt gleich gross sein, aber 2024 nicht überschreiten.**
Wie gross ist die Chance, in Huwilers D A – Spiel (Deep Alone) zu gewinnen, wenn wir die Zahl 24 notieren ?

Da ruft uns Richard Fritz – wohnhaft in (Zürich) – an und will von uns wissen: «Wie viele Spiele braucht es, um zu mehr als **4 mal 24 %** in jeder Minute mindestens ein Tor zu erzielen.»

Luis Suárez

Geschafft haben dies kürzlich Luis Suárez (34), und vor zehn Jahren nur noch Cristiano Ronaldo (36) und Zlatan Ibrahimovic (39). Dem Argentinier Lionel Messi (34) indes fehlen noch die Volltreffer in der 1. und 2. Spielminute. Und dies spricht für sich: Es ist absurd ein solches Problem zu mathematisieren, weil ja ohnehin rund 50% aller Tore Zufallstreffer sind.

Verwandeln wir jedoch Bälle zu Würfeln, so gibt es reizvolle mathematische Modelle, die solche Zufälligkeiten «gefällig» machen !

Frage **Wir werfen 10 Würfel mit dem Ziel, dass alle Ziffern von 1 – 6 auftauchen. Ist die Chance hierfür grösser oder kleiner als 24 % ?**

Grafik: Geremia Giancola (10 / CH)

24 Fluggäste stehen an, um ein Flugzeug mit **24 Plätzen** zu besteigen. Der Flug ist ausgebucht. Das heisst, alle Sitze sind reserviert. Ausgerechnet der erste Passagier in der Schlange hat seine Bordkarte verloren und belegt deshalb wahllos einen nummerierten Sitz. Die folgenden Fluggäste nehmen jeweils den ihnen zugewiesenen Sitzplatz ein, sofern dieser Platz frei ist. Ist der Sitzplatz aber bereits durch den fehlbaren Fluggast besetzt, gibt dieser den Platz frei und sucht sich wahllos einen anderen noch freien Platz.

Frage **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gast, der zuletzt einsteigen wird, den ihm ursprünglich zugewiesenen Sitzplatz bereits besetzt vorfinden wird ?**

Lösungen Rätsel des Monats $2 + 4 \cdot 5 + 2 + 0 = 24$

Wir konnten es nicht lassen, das originelle Zahlenspiel **D A** – «**D**eep **A**lone» – kreiert vom Zürcher Mathematiker **Hans Huwiler** bei der erst besten Gelegenheit zu testen. Passend waren beim Mai-Treffen des Lions Clubs Rigi **24 Personen** anwesend. Nur wir steckten als Erste den Zettel mit der **Zahl 24** nicht verdeckt in die Büchse mit der Warnung, wie gefährlich es ist, die Eins zu notieren. «In der Regel stürzen sich bei mehr als 20 Teilnehmern mindestens zwei auf die Eins, was wegen der Regel «**A**lone» direkt zum Ausschluss führt !»

Offensichtlich zeigte dieser Tipp bei unserem Anlass derart grosse Wirkung, dass nur noch ein Unerschrockener eine fette Eins auf sein Zettelchen kritzelte und damit prompt nicht nur «very deep» war, sondern auch «alone». Dementsprechend lächelnd nahm Rolf, so heisst der Gewinner, den Preis – eine Flasche exzellenter Rotwein im Wert von **24 Franken** – entgegen !

Bevor wir die mathematische Analyse zur gestellten Frage erledigen, lassen wir uns im Netz vier Mal je **24 Zahlen** (maximal **2'024**) auftischen. Und siehe da, einmal und nur einmal müssen wir uns geschlagen geben. Beim dritten Durchlauf taucht eine unerwünschte Zwei auf.

https://www.matheretter.de/rechner/zufallszahlengenerator

137 , 429 , 1'215 , 903 , 1'015 , 1'720 , 1'451 , 1'718 , 1'275 , 1'499 , 1'793 , 1'880 ,
792 , 826 , 1'812 , 1'826 , 1'897 , 609 , 1'195 , 1'910 , 49 , 1'783 , 1'603 , 819.

1'189 , 652 , 1'988 , 1'560 , 560 , 75 , 344 , 1490 , 1807 , 402 , 497 , 418 ,
2'023 , 971 , 1'544 , 1'422 , 1'146 , 1'048 , 672, 1'703 , 1'462 , 437 , 1'021, 112.

1’755 , 301 , 541 , 466 , **2** , 1'131 , 342 , 325 , 211 , 1'133 , 1'062 , 1'206 ,
1'815 , 225 , 597 , 187 , 678 , 859 , 190 , 380 , 292 , 1'244 , 1'678 , 1’571.

1’484 , 1'553 , 1'226 , 126 , 1'229 , 1'257 , 882 , 712 , 880 , 1'236 , 283, 250,
622 , 1'193 , 1’101 , 1’179 , 1'048 , 1'949 , 210 , 26 , 837 , 866 , 462 , 176.

$$\frac{2'024-24}{2'024} \approx 0.988142 \quad , \quad 0.988142^{24} \approx 0.751048$$

Gewinnchance : 75.1% , Verlustchance: 24.9%

Beim Wurf von 7 Würfeln die Anzahl Bilder, die alle 6 Ziffern enthalten, zu ermitteln, ist nicht trivial. Eine Variante besteht darin, die Lage der Doppelgänger – zum Beispiel **1 x x 1 x x x** – zu ermitteln und diese Anzahl (21) mit 5! (720) und mit 6 zu multiplizieren. 5 Fakultät entspricht der Anzahl Anordnungen der restlichen 5 Zahlen und jede der sechs Ziffern kann die Rolle eines Doppelgängers übernehmen.

$$\binom{7}{2} \cdot 5! \cdot 6 = 21 \cdot 120 \cdot 6 = 15'120 \;\Rightarrow\; \frac{15'120}{6^7} \approx 0.05401 \;\Rightarrow\; 5.40\%$$

Die Folge 0, 0, 0, 0, 0, 720, **15’120**, 191’520, 1’905’120, 16'435'440, … finden wir im Netz (A000920). https://oeis.org

6	7	8	9	10	11	12
720	15’120	192’520	1'905’129	16'435’440	129'230’640	953'029’440
465’656	6^7	6^8	6^9	6^10	6^11	6^12
1.54 %	5.40 %	11.40%	18.90 %	27.18 %	35.62 %	43.78 %

Somit braucht es **13 Würfel** (51.39%), um über die **50% Marke** zu springen,

Eine analytische Lösung zur Berechnung der Gegen-Wahrscheinlichkeit offeriert uns diese Formel. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k-1} \cdot \left(1 - \frac{k}{6}\right)^n \cdot \binom{6}{k}$

Hans Huwiler: «Endlich habe ich Zeit gefunden, mich mit der spannenden Würfelaufgabe zu beschäftigen und eine befriedigende Lösung zu finden. Die Lorbeeren gehören aber selbstverständlich – wie so oft – **Armin Widmer**, der mit seiner «Ein- und Ausschaltformel» einmal mehr brilliert. Diese Formel ist uns aus der Mengenlehre bekannt. Eine konkrete Anwendung ist aus meiner Sicht eine Rarität.»

Da machen wir keinen Hehl daraus. Das trickreiche Problem mit der verlorenen «boarding card» – eher bekannt unter dem Namen «**t**he **a**irplane **p**robability **p**roblem» (**TAPP**) – kann sich im Internet unmöglich verstecken.

https://medium.com/i-math/solving-an-advanced-probability-problem-with-virtually-no-math-5750707885f1

Mit dem Ansatz «im Kleinen suchen» verschafft sich jeder schnell einmal einen Überblick und «landet» wunschgemäss bei einer **fifty-fifty** Chance, gleichgültig ob das Flugzeug 2, 3 oder **24 Passagiere** Platz bietet.